# Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

## *Интегральные уравнения и вариационное исчисление, 4 семестр*

| | |
|---|---|
| Код, направление подготовки | 03.03.02 |
| Направленность (профиль) | Цифровые технологии в геофизике |
| Форма обучения | очная |
| Кафедра-разработчик | Кафедра экспериментальной физики |
| Выпускающая кафедра | Кафедра экспериментальной физики |

*Типовые задания для контрольной работы:*

1. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{\pi}\left(y''^2-y^2\right)dx\to extr;\qquad y(0)=y'(0)=y(\pi)=y'(\pi)=0.$$
2. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx\to extr;\qquad y(0)=1;\qquad y(1)=e.$$
3. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}(x+1)y''^2dx\to extr;\qquad y(0)=y'(0)=0;\quad y(1)=1;\quad y'(1)=2.$$
4. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}e^y y'^2dx\to extr;\qquad y(0)=0;\quad y(1)=\ln 4.$$
5. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_{-1}^{1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx\to extr;\qquad \int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=1;\qquad y(-1)=y(1)=0.$$
6. Среди кривых длины $L=10\arcsin\frac{3}{5}$, соединяющих точки A(-3,0) и B(3,0) и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком AB ограничивает наибольшую площадь.

7. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx\to extr;\quad \int_0^{\pi/2}y\sin x\,dx=1;\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$
8. Решить задачу на условный экстремум:
$$J(y,z)=\int_0^{1}\left(y^2+2y'^2+z'^2\right)dx,$$
$$y(0)=1,\ z(0)=0,\ y(1)=e+e^{-1},\ z(1)=2e-e^{-1},\ y'-z=0.$$

9. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}}\, y(t)dt + x^{3/2}$$

10. Найти итерированные ядра указанного ядра:

$$K(x,t) = x + \sin t, \qquad a = -\pi, \qquad b = \pi$$

11. Найти резольвенту ядра:

$$K(x,t) = xe^t; \qquad a = -1, \quad b = 1.$$

12. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\sin x\; y(t)dt + \cos x$$

13. Показать, что функция $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+x^2}dt\ .$$

.

14. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t) = 1$.

15. Показать, что функция φ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = xe^x; \qquad \varphi(x) = e^x \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

16. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t) = x - t$.

*Типовые вопросы к зачету:*

| Задание для показателя оценивания дискриптора ***«Знает»*** | Вид задания и формируемые компетенции |
|---|---|
| *Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (при необходимости продемонстрируйте вывод уравнений и доказательства теорем):*<br>1. Примеры задач вариационного исчисления.<br>2. Определение функционала.<br>3. Основные леммы вариационного исчисления.<br>4. Уравнение Эйлера.<br>5. Определение вариации.<br>6. Варианты уравнения Эйлера для функций от различных аргументов.<br>7. Уравнение Эйлера для случая нескольких функций.<br>8. Примеры изопериметрических задач.<br>9. Необходимые условия экстремума.<br>10. Примеры проблем, приводящих к задачам на условный | - теоретический<br><br>ОПК-1.1<br>ОПК-1.3 |

| | |
|---|---|
| экстремум.<br>11. Необходимые условия экстремума.<br>12. Определение второй вариации<br>13. Условия Лежандра<br>14. Уравнение Якоби<br>15. Определение вида интегрального уравнения.<br>16. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям.<br>17. Классификация интегральных уравнений.<br>18. Элементы функционального анализа: метрические, линейные, банаховы и гильбертовы пространства. Определения и примеры.<br>19. Ограниченные операторы. Понятие нормы оператора. Примеры.<br>20. Теорема о сжимающем отображении.<br>21. Метод последовательных приближений<br>22. Определение итерированного ядра.<br>23. Метод итерированных ядер.<br>24. Определение резольвенты.<br>25. Определение и свойства вырожденного ядра.<br>26. Метод решения уравнений с вырожденным ядром.<br>**27.** Преобразование Лапласа и его свойства.<br>28. Теорема о свёртке для преобразования Лапласа. Решение уравнений Вольтерра второго рода с помощью теоремы о свёртке. | |

| Задание для показателя оценивания дискриптора «Умеет» | Вид задания и формируемые компетенции |
|---|---|
| 26. Простейшая задача классического вариационного исчисления.<br>27. Привести пример задачи классического вариационного исчисления со старшими производными.<br>28. Привести пример задачи классического вариационного исчисления с двумя степенями свободы.<br>29. Привести пример задачи на условный экстремум.<br>30. Решить изопериметрическую задачу.<br>31. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательных приближений.<br>32. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер.<br>33. Найти итерированные ядра для заданного ядра.<br>34. Найти резольвенту для заданного ядра.<br>35. Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений. | - практический<br><br>ОПК-1.1<br>ОПК-1.3 |

| Задание для показателя оценивания дискриптора «Владеет» | Вид задания и формируемые компетенции |
|---|---|
| 36. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления.<br>37. Решить задачу классического вариационного исчисления со старшими производными.<br>38. Решить простейшую задачу классического вариационного | Практический<br><br>ОПК-1.1<br>ОПК-1.3 |

| | |
|---|---|
| исчисления с двумя степенями свободы.<br>39. Решить задачу на условный экстремум.<br>40. Решить изопериметрическую задачу.<br>41. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательным приближений.<br>42. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер.<br>43. Найти итерированные ядра для заданного ядра.<br>44. Найти резольвенту для заданного ядра.<br>45. . Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений.<br>46. Решить уравнение Вольтерра с применением теоремы о свёртке для преобразования Лапласа. | |

*Типовые практические задания к зачету:*

1. Найти решение вариационной задачи $\delta J[x(\cdot)] = 0$, $x(0) = 0$, $x(t_1) = x_1$, где

$$J[x(\cdot)] = \int_0^{t_1} \left[ (1+t^2)(x')^2 + t^2 x x' + t x^2 \right] dt \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[x()]$.

2. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{\pi} \left[ (y' + y)^2 + 2y \sin x \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[y()]$.

3. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1 - \ln 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[ x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x} \right] dx \ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

4. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)] = 0$, $z(0) = 4/5$, $z(\pi/2) = e^{\pi}$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} \left[ (z')^2 + 4z^2 + 2z \cos x \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

5. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 1$, $y(1/2) = 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{1/2} \left[ \frac{(y')^2}{x^2-1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2} \right] dx \ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

$\delta J[z(\cdot)] = 0$ $\qquad z(0) = 0$,

6. Найти решение вариационной задачи, $z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sinh^3(\pi/4) + \sinh\left(\frac{\pi}{4}\right)$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/4} \left[ zz' \arctan x - (z')^2 + \frac{z^2}{2(1+x^2)} - 9z^2 + 16z\sinh x \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

7. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)] = 0$, $z(1) = -2$, $z(3) = 2$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_1^3 \left[ 2\sqrt{x}(z')^2 + \frac{z^2}{x\sqrt{x}} - \frac{8z'}{x\sqrt{x}} \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

8. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = e^{-1}$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 \left[ \frac{(y')^2}{y^2} - xy' - y \right] dx \ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

9. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[ y'e^y + x^4(y')^3 \right] dx \ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y(\cdot)]$ на полученном решении?

10. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)] = \int_0^1 [2zz' + (z')^2] dx$, если $z(0) = z(1) = 0$, а связь имеет вид: $\int_0^1 [4xz' + zz'] dx = 4$.

11. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)] = \int_0^1 [zz' + 2(z')^2] dx$, если $z(0) = z(1) = 0$, а связь имеет вид: $\int_0^1 [-8xz' + zz'] dx = 8$.

12. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)] = \int_0^\pi [z^2 + (z')^2 + 2z\cos x] dx$, если $z(0) = 2,\ z(\pi) = -2$, а связь имеет вид: $\int_0^\pi z\cos x \, dx = \pi$.

13. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int_0^{\pi}[2z+3z'+(z')^2]dx$, если

$z(0)=0,\ z(\pi)=\pi^2$, а связь имеет вид: $\int_0^{\pi} z\sin x\, dx=\pi^2-1$.

14. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int_0^{1}[2xz+(z')^2]dx$, если

$z(0)=0,\ z(1)=3,$ а связь имеет вид: $\int_0^{1} zx\, dx=1$.

15. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Шварца:

$$\|\chi\|\|\psi\|\geq|(\chi,\psi)|\ .$$

16. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Минковского:

$$\|\chi\|+\|\psi\|\geq\|\chi+\psi\|.$$

17. Доказать, что пространство $\mathcal{L}=\left\{\psi:\psi=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}\right\}$ последовательностей образует метрическое пространство, если расстояние между любыми двумя элементами $\psi,\chi\in\mathcal{L}$ задаётся функцией

$$\rho(\psi,\chi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}\ .$$

Можно ли, сохранив метрическую функцию, превратить пространство $\mathcal{L}$ в банахово (то есть в линейное нормированное пространство), определив в нём операции сложения и умножения на числа?

18. Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство и пусть $\{\psi_1,\ \psi_2,\cdots,\ \psi_n\}$ - система попарно ортогональных векторов. Показать: а) что векторы этой системы линейно независимы; б) что если $\phi=\sum_1^n c_k\psi_k$ - произвольная суперпозиция этих векторов, то

$$\|\phi\|^2=\sum_1^n|c_k|^2\|\psi_k\|^2\ .$$

19. Постройте пример непрерывной функции, у которой первая и вторая производные непрерывны в некоторой точке, а третья имеет разрыв (первого или второго рода).

20. Рассмотрите оператор $\hat{C}_f:C[0,1]\to C[0,1],\ \ (\hat{C}_f\psi)(x)=\psi(f(x))$, где $f:[0,1]\to[0,1]$ - заданная дифференцируемая монотонная функция с ограниченной производной. Покажите, что оператор $\hat{C}_f$ - ограниченный, и найдите его норму. В пространстве $C[0,1]$ использовать норму $\|...\|_1$.

21. Оператор «взвешенного сдвига» $\hat{T}:\ \ell_2\to\ell_2$ определяется согласно условию

$$\hat{T}\psi=\hat{T}(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(a_1x_2,\ a_2x_3,\ a_3x_4,\cdots)\ ,$$

где числа $a_1,\ a_2,\ a_3,...$ - «веса». Найти условие, которому должны удовлетворять веса, чтобы оператор $\hat{T}$ был ограниченным. Определить норму $\hat{T}$.

22. Пусть интегральный оператор $\hat{A}: C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x t\psi(t)dt$.

Показать, что этот оператор ограничен, если в $C[0,1]$ используется $\sup-$ норма (то есть норма $\|\ldots\|_\infty$), и сравнить $\|\hat{A}\|$ с $\|\hat{A}^2\|$. Можно ли на основе полученного сравнения сделать вывод о сжимающем характере отображения, задаваемого оператором $\hat{A}$?

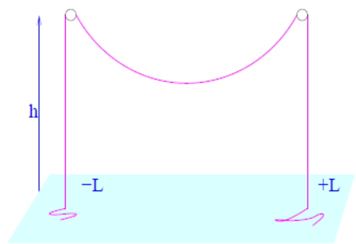
23. Доказать, что линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен.

24. Доказать, что если линейный оператор непрерывен в некоторой точке $\psi_0$ банахового пространства, то он непрерывен и во всей области определения этого оператора.

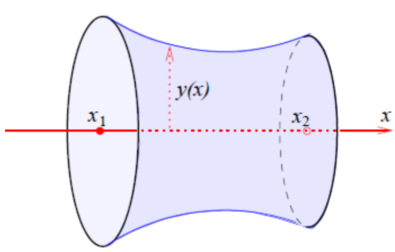
25. Пусть интегральный оператор $\hat{A}: C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x \psi(t)dt$.

Показать, что если $(\hat{A}\psi)(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, то $\psi(x) = 0$.

26. Найти форму «кривой прогиба» шнура, свободно перекинутого через два блока. Трение в блоках отсутствует. Указание: минимизируйте потенциальную энергию шнура. Обратите внимание на то, что натяжение в точках подвеса определяется весом свисающей части шнура и, следовательно, постоянно.




27. Мыльная плёнка натянута на два коаксиальных кольца радиусами $y_1$ и $y_2$. Свободная энергия $F$ мыльной плёнки пропорциональна площади её поверхности: $F = \sigma S$, $\sigma -$ коэффициент поверхностного натяжения. Принимая, что в положении равновесия свободная энергия минимальна, определить форму поверхности. Указание: эффектами гравитации пренебречь и использовать тот факт, что в этом случае плёнка принимает форму поверхности вращения.




28. Нерастяжимый шнур длины $\ell$ закреплён на двух опорах в точках $A_1$ и $A_2$, расположенных на одинаковой высоте. Расстояние $A_1A_2 = L < \ell$. Определить форму кривой.

29. Доказать, что ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве и обладающий всюду плотной областью определения, замыкаем.

30. Пусть $\hat{A}$ - интегральный оператор Вольтерры, $\hat{A}: C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(\hat{A}\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\psi(t)dt + \Phi_0(x), \quad a \le x \le b.$$

Функция $\Phi_0(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $K(x,t)$ - в квадрате $[a,b] \times [a,b]$.

Показать, что отображение, задаваемое таким оператором, будет сжимающим. Подсказка: используйте ограниченность ядра.

31. Рассмотрите последовательность функций $\left\{x^n\right\}_{n=0}^{n=\infty}$. Покажите, что эта последовательность не является сходящейся (к какой функции?) в пространстве $C[0,1]$ по $\sup-$ норме, но сходится по норме $\|...\|_1$.

32. Рассмотрите в качестве линейного нормированного пространства вещественную плоскость $\mathbb{E}_2$. Укажите множество точек на этой плоскости, которые соответствуют «единичному шару» $\|\psi\| \le 1$, $\psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, для трёх вариантов норм: $\|...\|_1$ , $\|...\|_2$ и $\|...\|_\infty$.

33. Рассмотрите последовательность функций $\left\{f_n(x)\right\}_{n=0}^{n=\infty}$ из $C[0,1]$, определяемую согласно равенству:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Проверьте, что $\|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n$, в то время как $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$. Какой вывод на основании этого факта можно сделать о свойствах последовательностей функций в разных банаховых пространствах?

34. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^3 + \int_0^\pi \sin(x-t) f(t)dt.$$

35. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^2 + \int_0^\pi \cos(x-t) f(t)dt.$$

36. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau, \\ y(t) = t + \displaystyle\int_0^t z(\tau)d\tau, \\ z(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau. \end{cases}$$

37. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau)d\tau \,, \\ y(t) = 1 + \int_0^t x(\tau)d\tau \,. \end{cases}$$

38. Найти решение уравнения Вольтерры первого рода:

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \ln(x/\tau)\, f(\tau)d\tau \,,$$

в котором $\Phi_0(x)$ - заданная функция.

39. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\psi(x) = \chi(x) + \int_0^1 (xy^3 + x^3 y)\psi(y)dy \,,$$

выразив его через моменты заданной функции $\chi(x)$.